МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Лабараторная работа №2
"Дифференциальные уравнения в частных производных"
студента 3 курса 1 группы
Пажитных Ивана Павловича

Преподаватель
Бондарь Иван Васильевич

Минск 2016

1 Условие

- Построить явную разностную схему
- Аппроксимировать граничные условия со вторым порядком
- Провести исследование порядка точности и устойчивости построенной разностной схемы
- Выполнить программную реализацию построенной схемы:
  - $N = 50, 100, 200$
  - Шаг h определить из условий устойчивости
  - $T = [0, 1]$
  - Построить графики
  - Проверить точность решения
  - Вывести время работы программы

2 Вариант №5

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x) \tag{1}$$

$$f(t,x) = \pi(-12\pi(t-2)^2 \sin(\pi(t-2)x) - x\cos(\pi(t-2)x)) \tag{2}$$

$$\begin{cases} u(t,0) = 0 \\ u(0,x) = sin(2\pi x) \end{cases} \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(t,1)}{\partial x} = -\pi(t-2)\cos(\pi(t-2)) \tag{4}$$

Точное решение:

$$u(t,x) = -\sin(\pi(t-2)x) \tag{5}$$

3 Решение

3.1 Явная разностная схема для (1):

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} - 25\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2} = f(t,x) \tag{6}$$

3.2 Аппроксимация граничного условия (4):

3.2.1 с порядком точности $O(h)$:

$$\frac{u(t,1) - u(t,1-h)}{h} = -\pi(t-2)\cos(\pi(t-2)) \tag{7}$$

3.2.2 с порядком точности $O(h^2)$:

$$\psi = lhs(4) - lhs(7)$$

$$\begin{gathered} \psi = \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} - \frac{u(t,1) - u(t,1-h)}{h} = \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} - \\ -\frac{1}{h}\left(u(t,1) - u(t,1) + h\frac{\partial u(t,1)}{\partial x} - \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(t,1)}{\partial x^2} - O(h^3)\right) = \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(t,1)}{\partial x^2} + O(h^2) \end{gathered} \tag{8}$$

3.3 Порядок точности и устойчивость:

3.3.1 порядок точности (6):

$$\psi = lhs(1) - lhs(6)$$

$$\begin{aligned}\psi = \frac{\partial u_i^k}{\partial t} - 25\frac{\partial^2 u_i^k}{\partial x^2} - \left(\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} - 25\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2}\right) = \\ = \frac{\partial u_i^k}{\partial t} - 25\frac{\partial^2 u_i^k}{\partial x^2} - \frac{1}{\tau}\left(u_i^k + \tau\frac{\partial u_i^k}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u_i^k}{\partial t^2} + O(\tau^3) - u_i^k\right) + \\ + \frac{25}{h^2}\left(\left(u_i^k - h\frac{\partial u_i^k}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u_i^k}{\partial x^2} + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u_i^k}{\partial x^4} + O(h^5)\right) - 2u_i^k + \right. \\ \left. + \left(u_i^k + h\frac{\partial u_i^k}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u_i^k}{\partial x^2} + \frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4 u_i^k}{\partial x^4} + O(h^5)\right) = \right. \\ = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u_i^k}{\partial t^2} + 50\frac{h^2}{4!}\frac{\partial^4 u_i^k}{\partial x^4} + O(\tau^2 + h^3)\end{aligned} \tag{9}$$

порядок точности (7): $\psi \sim O(h)$
порядок точности (8): $\psi \sim O(h^2)$
Итого порядок точности (6) с (8): $O(\tau + h^2)$

3.3.2 устойчивость (6) методом гармоник:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} - 25\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2} = 0 \tag{11}$$

$$u_i^k \sim q^k e^{i\phi_i h} \tag{12}$$

подставляя (12) в (11):

$$\begin{aligned}\frac{q^{k+1}e^{i\phi_i h} - q^k e^{i\phi_i h}}{\tau} - 25\frac{q^k e^{(i-1)\phi_i h} - 2q^k e^{i\phi_i h} + q^k e^{(i+1)\phi_i h}}{h^2} = \left[/q^k e^{i\phi_i h}\right] = \\ = \frac{q-1}{\tau} + \frac{25}{h^2}(e^{-i\phi h} - 2 + e^{i\phi h}) = 0\end{aligned} \tag{13}$$

$$|q| = \left|1 - \frac{25\tau}{h^2}(e^{-i\phi h} - 2 + e^{i\phi h})\right| = \left|1 - \frac{25\tau}{h^2}(2\cos\phi h - 2)\right| < 1 \tag{14}$$

раскрывая модуль в (14):

$$-\frac{1}{25} < \frac{\tau}{h^2}(\cos\phi h - 1) < 0 \tag{15}$$

Итого (6) устойчива при:

$$\frac{\tau}{h^2} > -\frac{1}{25} \tag{16}$$