МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Лабараторная работа №1
“Численное решение задачи Коши для ОДУ”
студента 3 курса 1 группы
Пажитных Ивана Павловича

Преподаватель
Бондарь Иван Васильевич

Минск 2016

1 Условие

Написать программу, реализующую метод, указанный в варианте с автоматическим выбором шага интегрирования (используя правило Рунге). Экспериментально сравнить эффективность использованного метода с явным методом Эйлера.

Результаты оформить в виде отчета, в который включить графики компонент численного решения. Кроме того, включить в отчет результаты сравнения используемых методов, оформленные в виде таблицы (провести численные эксперименты с точностью $tol = 0.000001$)

Входные данные:

- tol - требуемая точность
- h_0 - величина начального шага
- T - конечная точка интегрирования

Выходные данные:

- N_{tot} - общее количество шагов по времени
- N_A - количество принятых шагов
- N_R - количество отброшенных шагов
- t - время работы программы

2 Вариант

№4. "Аттрактор Лоренца"

Данная система ОДУ появилась в результате попыток математического моделирования климата. При определённом выборе параметров траектория любого решения этой системы стремится при $t \to \infty$ к асимптотически устойчивому непериодическому решению — так называемому «странному аттрактору».

$$\begin{cases} y_1' = -\sigma(y_1 - y_2) \\ y_2' = -y_1 y_3 + r y_1 - y_2 \\ y_3' = y_1 y_2 - b y_3 \end{cases} \tag{1}$$

$$y_0 = (-8, 8, r-1)^T \tag{2}$$

Упомянутое хаотичное поведение решения достигается, например, при следующих значениях параметров:

$$\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28 \tag{3}$$

Решить явным методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

3 Теория

3.1 Явный метод Эйлера

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + h, \\ f(x_i, y_i) = y'(x_i), \\ y_i = y_{i-1} + h f(x_{i-1}, y_{i-1}), \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \tag{4}$$

3.2 Явный метод Рунге-Кутты 4-го порядка

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \tag{5}$$

Подставляя коэффициенты:

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \\ k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h) \\ k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h) \end{cases} \tag{6}$$

$$y_i = y_{i-1} + (\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{6}k_2 + \frac{2}{6}k_3 + \frac{1}{6}k_4)h, i = \overline{1, n} \tag{7}$$

3.3 Правило Рунге

Для оценки требуется решить задачу на 2 сетках: две итерации с шагом h (y_1, y_2) и одна — с шагом 2h ($\overline{y_2}$), получаем оценку:

$$\varepsilon_i = \frac{y_2 - \overline{y_2}}{2^p - 1} \tag{8}$$

При подборе следующий шаг считается как $h_{new} < \delta h$, где δ:

$$\delta = \left(\frac{tol}{|\varepsilon|}\right)^{\frac{1}{p+1}} \tag{9}$$

4 Отчет

4.1 $y(0) = (-8, -8, 27)$

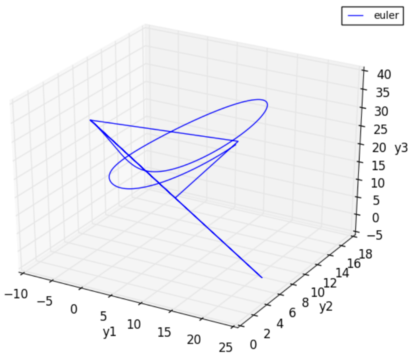
tol	Метод	h	n	N	t
1e-07	Эйлера	4.92014936374e-06	203245	2	0.96827507019s
1e-07	Рунге-Кутта	0.00222565354887	449	2	0.0159111022949s

где n - кол-во итераций последнего вычисления для шага h,
N - кол-во пересчётов шага h, для отрезка интегрирования $[0, 1]$, для начально шага $h_0 = 0.1$
$y_n =$ [9.05401908 14.55586445 18.40818043] - методом Эйлера
$y_n =$ [9.01971044 14.50963827 18.35917819] - методом Рунге-Кутта

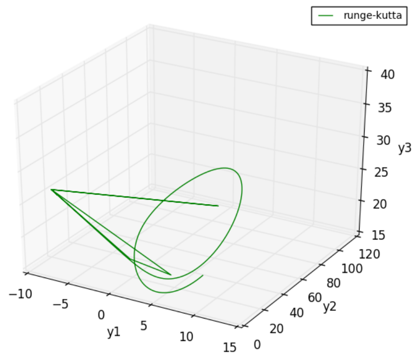
4.2 $y(0) = (10, 1, 27)$

tol	Метод	h	n	N	t
1e-07	Эйлера	8.0230021755e-06	124641	2	0.586709022522s
1e-07	Рунге-Кутта	0.00361778866086	276	2	0.0107769966125s

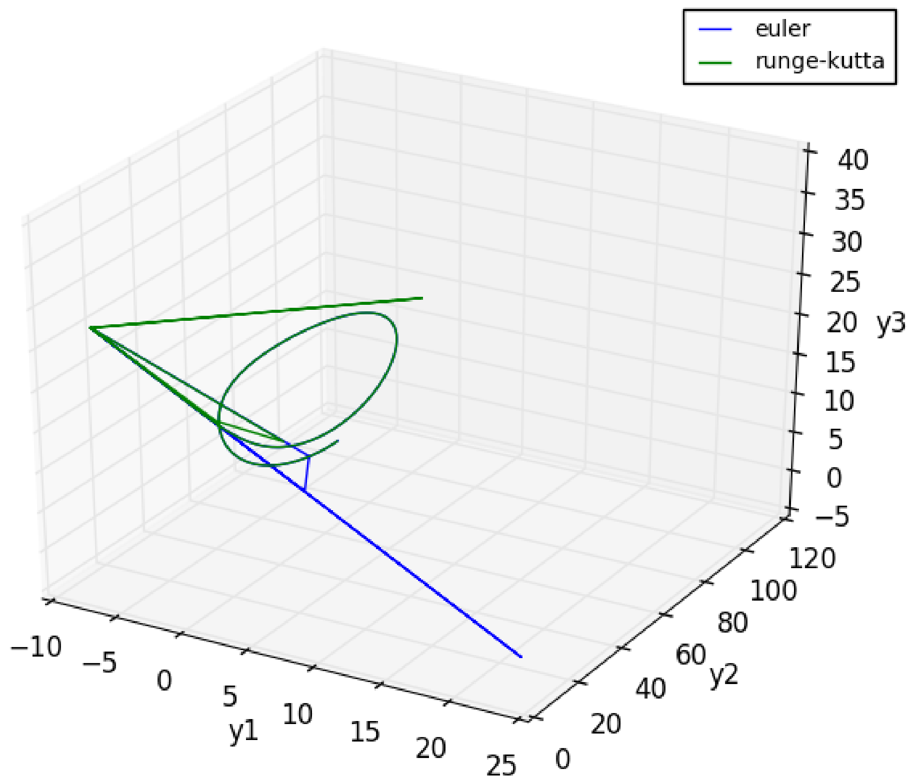
где n - кол-во итераций последнего вычисления для шага h,
N - кол-во пересчётов шага h, для отрезка интегрирования $[0, 1]$, для начально шага $h_0 = 0.1$
$y_n =$ [8.06618792 12.49772564 18.73044515] - методом Эйлера
$y_n =$ [8.00373455 12.40821836 18.66281849] - методом Рунге-Кутта



(a) Эйлера

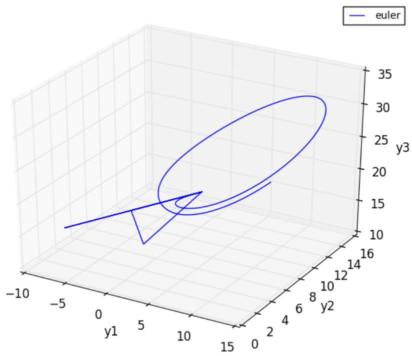


(b) Рунге-Кутты

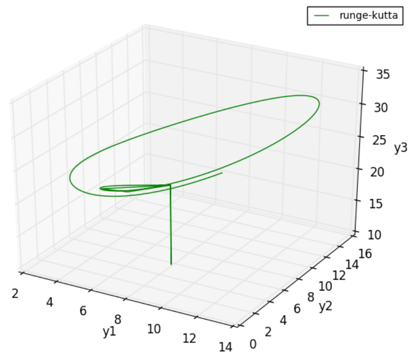


(c) совместный

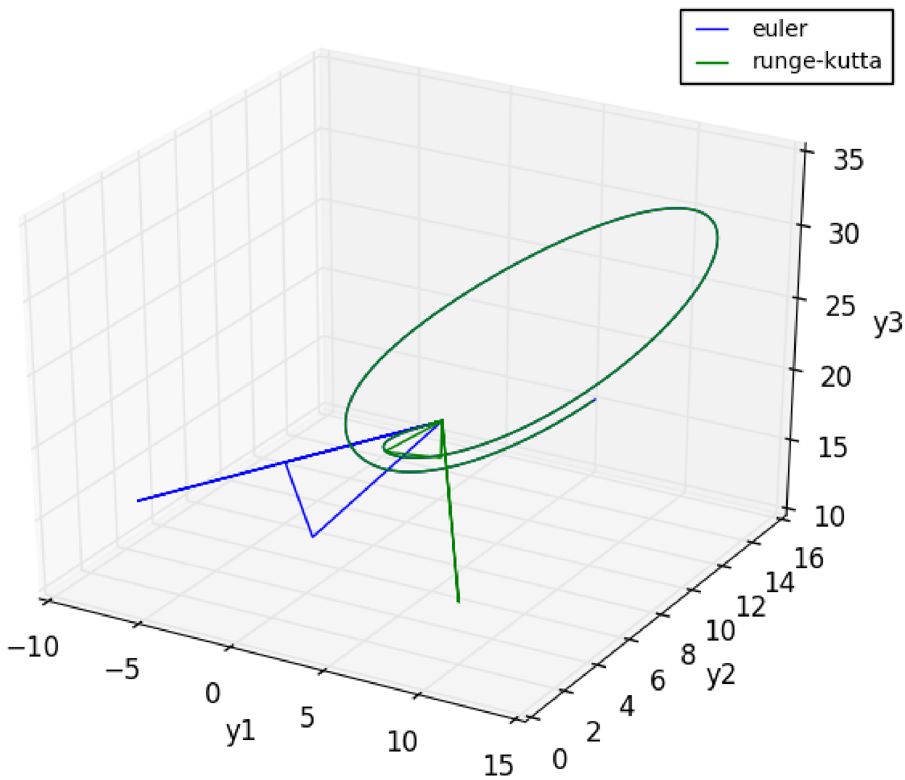
Рис. 1: Графики решения для 4.1



(a) Эйлера



(b) Рунге-Кутты



(c) совместный

Рис. 2: Графики решения для 4.2