МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Лабараторная работа №2
студента 2 курса 1 группы
Пажитных Ивана Павловича

Преподаватель
Полещук Максим Александрович

Минск 2016

1 Условие

Для функции , взятой в соответствии с вариантом задания из лабораторной работы №1, вычислить интеграл по составным формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона с точностью $\frac{1}{2}10^{-3}$, $\frac{1}{2}10^{-5}$, $\frac{1}{2}10^{-7}$. Величину шага определить, исходя из апостериорной оценки погрешности численного интегрирования. Уточнить значение интеграла по Ричардсону. В отчёте представить величину шага, значение вычисленного интеграла без уточнения по Ричардсону, значение вычисленного интеграла после уточнения по Ричардсону (для каждой величины точности и квадратурной формулы). Для вычислений использовать тип float.

2 Вариант

$$\int_{-2}^{2} x * (3^x + 1)^{-1} dx \tag{1}$$

3 Теория

3.1 Формула средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = h(f_{1/2} + f_{3/2} + f_{5/2} + \ldots + f_{\frac{2n-3}{2}} + f_{\frac{2n-1}{2}}) + r_n, r_n = \frac{(b-a)^3}{24 * n^2} * f^{(2)}(x) \tag{2}$$

3.2 Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_n + 2(f_1 + \ldots + f_{n-1})) + r_n, r_n = \frac{(b-a)^3}{12 * n^2} * f^{(2)}(x) \tag{3}$$

3.3 Формула Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2}{6}(f_0 + f_n + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2k-1}) + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2k})) + r_n, r_n = \frac{(b-a)^5}{180 * n^4} * f^{(4)}(x) \tag{4}$$

3.4 Оценка:

Будем использовать **апостериорную оценку**. Выбираем первоначально фиксированный шаг h=0.001, а затем производим вычисления до тех пор, пока величина $\Theta|I_{\frac{h}{2}} - I_h|$, не станет меньше необходимой точности ε, где $\Theta = \frac{1}{3}$ или $\Theta = \frac{1}{15}$ для формул средних прямоугольников и трапеций или формулы Симпсона соответственно. I_h - значение интеграла, вычисленное по квадратурной формуле с шагом h, а - $I_{\frac{h}{2}}$ значение того же интеграла, вычисленное для шага $\frac{h}{2}$.

3.5 Уточнение по Ричардсону:

Будем использовать формулу:

$$I = \frac{2^k \times I_{\frac{h}{2}} - I_h}{2^k - 1} \tag{5}$$

где $k = 2$ для формул средних прямоугольников и трапеций, и $k = 4$ для формулы Симпсона.

4 Отчет

Точное значение: $I = \int_{-2}^{2} x \cdot (3^x + 1)^{-1} dx = -1.1999693037796034476986623550074914016742366601330206064 0$

Таблица 1: Формула средних прямоугольников

погрешность:	шаг:	значение:	по Ричардсону:
$0.5 * 10^{-3}$	0.0005	-1.19996929133	-1.19996930378
$0.5 * 10^{-5}$	0.0005	-1.19996929133	-1.19996930378
$0.5 * 10^{-7}$	0.0005	-1.19996929133	-1.19996930129

Таблица 2: Формула трапеций

погрешность:	шаг:	значение:	по Ричардсону:
$0.5 * 10^{-3}$	0.0005	-1.19986934091	-1.20000263304
$0.5 * 10^{-5}$	$1.5625 * 10^{-5}$	-1.1999693038	-1.19996930377
$0.5 * 10^{-7}$	$1.5625 * 10^{-5}$	-1.1999693038	-1.19996930378

Таблица 3: Формула Симпсона

погрешность:	шаг:	значение:	по Ричардсону:
$0.5 * 10^{-3}$	0.0005	-1.19990263711	-1.19994708156
$0.5 * 10^{-5}$	$3.125 * 10^{-5}$	-1.19996930378	-1.19996652601
$0.5 * 10^{-7}$	$7.8125 * 10^{-6}$	-1.19996930377	-1.19996930377