

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Лабораторная работа №1
студента 2 курса 1 группы
Пажитных Ивана Павловича

Преподаватель
Полещук Максим
Александрович

Минск 2016

1 Условие

В соответствии с вариантом задания (равным номеру в списке академической группы) произвести табулирование функции, используя чебышевскую сетку с m узлами, $m \in \{3, 4, 5, 6, 8, 10\}$. Для каждого m построить интерполяционный многочлен $P(x)$ Ньютона на чебышевской сетке. В отчёте представить значения аргумента x_n , приближенные значения функции $P(x_n)$, точные значения функции $f(x_n)$ и оценку погрешности в точках исходного отрезка $|r_m(x_n)|$ в $3m$, распределённых равномерно на отрезке $[a, b]$. Вывод всех величин организовать в таблицу. Для каждого m оценить погрешность интерполирования на отрезке (в равномерной норме). Для вычислений использовать тип float.

2 Вариант

$$f(x) = x \cdot (3^x + 1)^{-1}, x \in [-2, 2]. \tag{1}$$

3 Теория

Вычислим узлы Чебышева по формуле:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right), k = 0, 1, \dots, n. \tag{2}$$

По полученным узлам Чебышева заполняется таблица разделённых разностей по следующей формуле:

$$f(x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_{i+k-1}}, i = \overline{0, n-1}, k = \overline{1, n-i}. \tag{3}$$

Следующая формула представляет собой оценку погрешности интерполяции:

$$|r_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}, \tag{4}$$

где $M_{n+1} = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$, а производная $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_n]$.

Используя полученную таблицу разделённых разностей строят интерполяционный многочлен Ньютона:

$$P(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f(x_0, \dots, x_k) \cdot (x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_{k-1}) \tag{5}$$

Таблица производных исходной функции $f(x) = x \cdot (3^x + 1)^{-1}, x \in [-2, 2]$

$f(x)$	$x \cdot (3^x + 1)^{-1}$
$f^{(1)}(x)$	$\frac{3^x - 3^x x \ln(3) + 1}{(3^x + 1)^2}$
$f^{(2)}(x)$	$x \left(\frac{2 \cdot 3^{2x} \ln^2(3)}{(3^x + 1)^3} - \frac{3^x \ln^2(3)}{(3^x + 1)^2} \right) - \frac{2 \cdot 3^x \ln(3)}{(3^x + 1)^2}$

4 Отчет

4.1 Разделённые разности:

for $m = 3 \Rightarrow n = 2$.

1.732	0.2248	0.1298	-0.2137
1.225e-16	6.123e-17	0.8702	
-1.732	-1.507		

for $m = 4 \Rightarrow n = 3$.

1.848	0.2145	-0.01491	-0.197	2.253e-17
0.7654	0.2306	0.5	-0.197	
-0.7654	-0.5347	1.015		
-1.848	-1.633			

for $m = 5 \Rightarrow n = 4$.

1.902	0.2094	-0.06059	-0.1452	0.03143	0.01652
1.176	0.2535	0.2156	-0.2419	-0.03143	
1.225e-16	6.123e-17	0.7844	-0.1452		
-1.176	-0.9221	1.061			
-1.902	-1.693				

for $m = 6 \Rightarrow n = 5$.

1.932	0.2066	-0.07778	-0.1021	0.04991	0.01492	8.98e-19
1.414	0.2469	0.0666	-0.2243	-2.944e-17	0.01492	
0.5176	0.1871	0.5	-0.2243	-0.04991		
-0.5176	-0.3305	0.9334	-0.1021			
-1.414	-1.167	1.078				
-1.932	-1.725					

for $m = 8 \Rightarrow n = 7$.

1.962	0.2037	-0.08959	-0.0571	0.05299	0.001613	-0.005246	-0.001447	-8.457e-18
1.663	0.2305	-0.04103	-0.1404	0.04919	0.01773	1.252e-17	-0.001447	
1.111	0.2531	0.1376	-0.2414	-0	0.01773	0.005246		
0.3902	0.1539	0.5	-0.2414	-0.04919	0.001613			
-0.3902	-0.2363	0.8624	-0.1404	-0.05299				
-1.111	-0.858	1.041	-0.0571					
-1.663	-1.432	1.09						
-1.962	-1.758							

for $m = 10 \Rightarrow n = 9$.

1.975	0.2024	-0.09338	-0.03848	0.04561	-0.006974	-0.005282	9.027e-05	0.0005382	0.0001432	-9.94
1.782	0.2205	-0.07179	-0.08716	0.05721	0.005113	-0.005542	-0.001734	-2.799e-18	0.0001432	
1.414	0.2469	0.004392	-0.1712	0.0465	0.02002	2.576e-17	-0.001734	-0.0005382		
0.908	0.2446	0.1929	-0.2515	-6.114e-17	0.02002	0.005542	9.027e-05			
0.3129	0.1298	0.5	-0.2515	-0.0465	0.005113	0.005282				
-0.3129	-0.1831	0.8071	-0.1712	-0.05721	-0.006974					
-0.908	-0.6633	0.9956	-0.08716	-0.04561						
-1.414	-1.167	1.072	-0.03848							
-1.782	-1.562	1.093								
-1.975	-1.773									

4.2 Оценка погрешности интерполирования:

for $m = 3 \Rightarrow n = 2$.

x	f(x)	P(x)	r(x)
-2	-1.8	-0.2596	1.54
-1.5	-1.258	-0.1947	1.063
-1	-0.75	-0.1298	0.6202
-0.5	-0.317	-0.06489	0.2521
0	0	2.776e-17	2.776e-17
0.5	0.183	0.06489	0.1181
1	0.25	0.1298	0.1202
1.5	0.2421	0.1947	0.04741
2	0.2	0.2596	0.05957

for $m = 4 \Rightarrow n = 3$.

x	f(x)	P(x)	r(x)
-2	-1.8	-1.825	0.0248
-1.636	-1.404	-1.382	0.02137
-1.273	-1.021	-0.9922	0.02845
-0.9091	-0.6644	-0.654	0.01037
-0.5455	-0.3521	-0.368	0.01588
-0.1818	-0.09996	-0.134	0.03407
0.1818	0.08186	0.04779	0.03407
0.5455	0.1934	0.1775	0.01588
0.9091	0.2447	0.2551	0.01037
1.273	0.2521	0.2806	0.02845
1.636	0.2326	0.2539	0.02137
2	0.2	0.1752	0.0248

for $m = 5 \Rightarrow n = 4$.

x	f(x)	P(x)	r(x)
-2	-1.8	-2.132	0.3323
-1.714	-1.488	-1.652	0.164
-1.429	-1.182	-1.238	0.05516
-1.143	-0.8894	-0.8847	0.004752
-0.8571	-0.6167	-0.5889	0.02778
-0.5714	-0.3726	-0.3458	0.02681
-0.2857	-0.1651	-0.1509	0.01417
0	0	-8.606e-18	8.606e-18
0.2857	0.1206	0.1114	0.009187
0.5714	0.1989	0.1878	0.0111
0.8571	0.2405	0.2334	0.007089
1.143	0.2534	0.2527	0.0006964
1.429	0.2461	0.2501	0.004004
1.714	0.2263	0.2301	0.003755
2	0.2	0.1969	0.003148

for $m = 6 \Rightarrow n = 5$.

x	f(x)	P(x)	r(x)
-2	-1.8	-1.798	0.002397
-1.765	-1.543	-1.545	0.002532
-1.529	-1.289	-1.291	0.001357
-1.294	-1.043	-1.041	0.001394
-1.059	-0.8067	-0.8037	0.003071
-0.8235	-0.5863	-0.5836	0.002727
-0.5882	-0.386	-0.3852	0.000748
-0.3529	-0.2103	-0.212	0.001704
-0.1176	-0.06262	-0.06596	0.00334
0.1176	0.05503	0.05169	0.00334
0.3529	0.1427	0.141	0.001704
0.5882	0.2023	0.203	0.000748
0.8235	0.2372	0.24	0.002727
1.059	0.2521	0.2552	0.003071
1.294	0.2516	0.253	0.001394
1.529	0.2402	0.2389	0.001357
1.765	0.222	0.2194	0.002532
2	0.2	0.2024	0.002397

x	f(x)	P(x)	r(x)
-2	-1.8	-1.8	0.0002371
-1.826	-1.61	-1.609	0.0002448
-1.652	-1.421	-1.421	2.035e-05
-1.478	-1.235	-1.235	0.0002597
-1.304	-1.053	-1.053	0.0002413
-1.13	-0.8771	-0.8771	2.841e-05
-0.9565	-0.7087	-0.7085	0.0002101
-0.7826	-0.5499	-0.5495	0.0003275
-0.6087	-0.4025	-0.4022	0.0002653
-0.4348	-0.2683	-0.2683	6.257e-05
-0.2609	-0.149	-0.1492	0.0001753
-0.08696	-0.04555	-0.04589	0.0003316
0.08696	0.0414	0.04107	0.0003316
0.2609	0.1119	0.1117	0.0001753
0.4348	0.1664	0.1665	6.257e-05
0.6087	0.2062	0.2065	0.0002653
0.7826	0.2327	0.2331	0.0003275
0.9565	0.2478	0.248	0.0002101
1.13	0.2533	0.2533	2.841e-05
1.304	0.2513	0.251	0.0002413
1.478	0.2434	0.2431	0.0002597
1.652	0.2313	0.2313	2.035e-05
1.826	0.2165	0.2167	0.0002448
2	0.2	0.1998	0.0002371

for $m = 10 \Rightarrow n = 9$.

x	f(x)	P(x)	r(x)
-2	-1.8	-1.8	2.352e-05
-1.862	-1.649	-1.649	2.038e-05
-1.724	-1.499	-1.499	1.455e-05
-1.586	-1.35	-1.35	2.584e-05
-1.448	-1.203	-1.203	6.73e-06
-1.31	-1.059	-1.059	1.886e-05
-1.172	-0.919	-0.919	2.998e-05
-1.034	-0.7831	-0.7832	2.051e-05
-0.8966	-0.6528	-0.6528	2.04e-06
-0.7586	-0.5288	-0.5288	2.396e-05
-0.6207	-0.4122	-0.4122	3.344e-05
-0.4828	-0.3039	-0.3039	2.596e-05
-0.3448	-0.2047	-0.2047	5.568e-06
-0.2069	-0.1152	-0.1152	1.775e-05
-0.06897	-0.03579	-0.03582	3.294e-05
0.06897	0.03318	0.03314	3.294e-05
0.2069	0.09174	0.09172	1.775e-05
0.3448	0.1401	0.1401	5.568e-06
0.4828	0.1788	0.1789	2.596e-05
0.6207	0.2085	0.2085	3.344e-05
0.7586	0.2298	0.2298	2.396e-05
0.8966	0.2438	0.2438	2.04e-06
1.034	0.2513	0.2513	2.051e-05
1.172	0.2535	0.2534	2.998e-05
1.31	0.2511	0.2511	1.886e-05
1.448	0.2451	0.2451	6.73e-06
1.586	0.2363	0.2363	2.584e-05
1.724	0.2255	0.2255	1.455e-05
1.862	0.2132	0.2132	2.038e-05
2	0.2	0.2	2.352e-05