Лабораторная работа №7

«Метод Данилевского»

выполнил Пажитных Иван, 2-й курс, 1-я группа

1) Постановка задачи

Необходимо найти собственные значения и собственные векторы матрицы А:

$$A-\lambda E_n=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \ldots & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix},\quad \det(A-\lambda E_n)=(-1)^n\,\mathrm{Pn}(\lambda)$$

Для этого требуется:

1. Построить $P_n(\lambda)=(\lambda^n-p_n\lambda^{n-1}-\ldots-p_1\lambda\ -p_0)$ – собственный (характеристический) многочлен матрицы А.
2. Решить уравнение $P_n(\lambda)=0$ и найти $\lambda_i(A),\quad i=\overline{1,n}$
3. Найти собственные векторы: $Ax_i=\lambda_i x_i,\quad i=\overline{1,n}$

2)Алгоритм решения

Метод Данилевского является прямым методом решения полной задачи собственных значений (т.е. позволяет весь спектр). Метод построен на том факте, что преобразование подобия $S^{-1}AS$ не изменяет характеристического многочлена. С помощью такого преобразования исходная матрица А приводится к канонической форме Фробениуса:

$$\Phi=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n\\ 1 & 0 & 0 & \ldots & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad |\Phi-\lambda E_n|=\begin{vmatrix} p_1-\lambda & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n\\ 1 & -\lambda & 0 & \ldots & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

После разложения определителя получим:

$$det|\Phi-\lambda E_n|=(-1)^n(\lambda^n-p_n\lambda^{n-1}-\ldots-p_1\lambda\ -p_0)=(-1)^n\,\mathrm{Pn}(\lambda)$$

Матрица A приводится к Φ, в результате последовательного домножения справа на M_{n-1} и слева на M_{n-1}^{-1}, а S можно получить как $S=M_{n-1}\,M_{n-2}..\,M_{n-1}$

$$M_{n-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ & \vdots & & \ddots & & \vdots\\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn-1}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn-1}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn-1}} & \cdots & \frac{1}{a_{nn-1}} & -\frac{a_{nn}}{a_{nn-1}}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{n-1}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ & \vdots & & \ddots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{n1} & a_{n1}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Из $P_n(\lambda)=0$ находим λ_i, далее решая $\Phi y=\lambda_i y,\ i=\overline{1,n}$ находим собственный вектор матрицы Ф: $y=(\lambda_i^{n-1},\lambda_i^{n-2},\ldots\lambda_i\ ,1)^T$, далее находим собственные векторы матрицы A из $x=Sy=M_{n-1}\,M_{n-2}..\,M_{n-1}y$.

3) Листинг программы

```
a = np.array(A)
At = a.transpose()                    # находим At
a = np.dot(At, a)                     # перемножаем A на At, теперь A - симметрическая
f = a
s = np.identity(n)

for i in range(n - 1):
    m = np.identity(n)
    m[n - 2 - i][:] = f[n - 1 - i][:]                         # выделяем M^(-1)
    f = np.dot(m, f)                                          # умножаем A на M^(-1) слева
    f = np.dot(f, np.linalg.inv(m))                           # умножаем A на M справа
    s = np.dot(s, np.linalg.inv(m))                           # находим S

p = f[0][:]                                                   # выделяем p

x = Symbol('x')                                               # вычисляем собственные значения
Lambda = solve(x**5 - p[0] * x**4 - p[1] * x**3 - p[2] * x**2 - p[3] * x - p[4], x)

l = max(Lambda)                                               # максимальное собственное
y = [l ** i for i in range(n - 1, -1, -1)]                    # строим y
x = np.dot(s, y)                                              # находим собственный вектор
r = np.dot(a, x) - l * x                                      # находим вектор невязки
rnorm = np.linalg.norm(r, 1)                                  # находим норму невязки
```

4) Результат и его анализ

Матрица A:

```
[[ 0.6897 -0.0908  0.0182  0.0363  0.1271]
 [ 0.0944  1.0799  0.     -0.0726  0.0726]
 [ 0.0545  0.      0.8676 -0.2541  0.1452]
 [-0.1089  0.2287  0.      0.8531 -0.0363]
 [ 0.4538  0.      0.1634  0.0182  1.0164]]
```

Симметрическая AA^T:

```
[[ 0.70536135  0.01441237  0.13398766 -0.08030921  0.5676231 ]
 [ 0.01441237  1.22673234 -0.00165256  0.11340719  0.05855825]
 [ 0.13398766 -0.00165256  0.77976056 -0.21682262  0.2943685 ]
 [-0.08030921  0.11340719 -0.21682262  0.79926611 -0.0500214 ]
 [ 0.5676231   0.05855825  0.2943685  -0.0500214   1.07689486]]
```

Каноническая $Ф$:

```
[[ 4.58801522 -7.82119475  6.11344651 -2.15665219  0.2685558 ]
 [ 1.          0.          0.          0.          0.        ]
 [ 0.          1.          0.          0.          0.        ]
 [ 0.          0.          1.          0.          0.        ]
 [ 0.          0.          0.          1.          0.        ]]
```

Матрица преобразования S:

[[-1838.0270	7429.7208	-10317.0031	5596.6325	-902.8675	]
[-770.1135	2931.4987	-3815.8223	1957.8843	-306.0318	]
[4261.5030	-17193.6450	23828.0137	-12899.4827	2075.3738	]
[3319.5625	-13440.7056	18683.9934	-10131.1287	1631.1506	]
[0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	]]

Коэффициенты собственного многочлена $P(\lambda)$:

[4.58801522 -7.82119475 6.11344651 -2.15665219 0.2685558]

Собственные значения λ:

[0.274152549963743, 0.550498737833341, 0.857845170065952, 1.26253883985405, 1.64297992228292]

Максимальное собственное λ_{max}:

1.64297992228292

Собственный вектор матрицы Φ — $y(\lambda_{max})$:

[7.28666871579193, 4.43503211266704, 2.69938302502478, 1.64297992228292, 1]

Собственный вектор матрицы A — $x(\lambda_{max})$:

[0.700820201187867 0.0963414902631712 0.510986808696543 -0.244361766642896 1.00000000000000]

Вектор невязки r:

[-3.93569621337519e-11 -1.15703280290091e-11 7.80704390024312e-11 4.51632620190878e-11 -9.34807786734382e-14]

Норма $||r||$:

1.74254471962954E-10

С помощью метода Данилевского мы нашли все собственные значения и по ним можем построить полный спектр. Для найденного собственного вектора x матрицы A соответствующего максимальному собственному значению λ_{max} норма вектора невязки $r = Ax - \lambda_{max}x$ получилась порядка 10^{-10}, что говорит о том, что собственный вектор найден с достаточной точностью.