Лабораторная работа №5

«Метод Гаусса-Зейделя»

выполнил Пажитных Иван, 2-й курс, 1-я группа

1) Постановка задачи

Необходимо найти решение системы линейных алгебраических уравнений вида $Ax = b$, где A- квадратная матрица n-ого порядка, x и b – столбцы размеров n×1.

$$\begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} & \cdots & a_{1n} \mid b_1 \\ a_{21}\, a_{22} a_{23} & \dots & \mid b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\, a_{n2} a_{n3} & \cdots & a_{nn} \mid b_n \end{bmatrix}$$

Предполагается, что det A=|A|≠0. Тогда решение системы существует и оно единственно. Метод Гаусса-Зейделя состоит в последовательном вычислении значения вектора x^k, до тех пор, пока не выполнится условие:

$$||(A, x^k) - b|| \le \varepsilon$$

2)Алгоритм решения

Найдём начальное приближение x^0 и запишем матрицу (L+D):

$$(L + D) = \begin{bmatrix} a_{11}\ 0\ 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}\, a_{22}\ 0 & \dots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\, a_{n2} a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad x^0 = \begin{bmatrix} \frac{b_{11}}{a_{11}} \\ \frac{b_{22}}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_{nn}}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Далее будем вычислять следующее значение x, как:

$x^{k+1} = -(L + D)^{-1}Ux^k + (L + D)^{-1}b$, где U – матрица-верхний треугольник A

Или $\quad x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad i = \overline{1, n}$

3) Листинг программы

```
E = identity(n)
eps = 10 ** (-5)
a, b = array(A), array(f).transpose()

D = diag(a)                                  # диагональные ел-ты A
xk, x = array(b / D) , zeros(n)              # начальное приближение
k = 0

while True:                                  # итерационный процесс
    for i in range(n):
        x[i] = b[i] / a[i][i] - sum([x[j] * a[i][j] / a[i][i] for j in range(i)]) - sum(
                [xk[j] * a[i][j] / a[i][i] for j in range(i + 1, n)])
    r = dot(A, x) - f                        # находим вектор невязки
    if abs(norm(xk, 1) - norm(x, 1)) < eps:  # условие окончания итерации
        break
    xk = array(x)
    k += 1

r = dot(A, x) - f                            # находим вектор невязки
```

4) Результат и его анализ

Матрица коэффициентов A:

```
[[ 0.6897 -0.0908  0.0182  0.0363  0.1271]
 [ 0.0944  1.0799  0.     -0.0726  0.0726]
 [ 0.0545  0.      0.8676 -0.2541  0.1452]
 [-0.1089  0.2287  0.      0.8531 -0.0363]
 [ 0.4538  0.      0.1634  0.0182  1.0164]]
```

Столбец свободных членов b:

```
[ 4.2108  4.6174 -5.877   2.7842  0.2178]
```

Вектор x^0:

```
[ 6.10526316  4.27576627 -6.77385892  3.26362677  0.21428571]
```

Матрица $(L + D)^{-1}$:

```
[[ 1.44990576  0.          0.          0.          0.        ]
 [-0.12674424  0.92601167  0.          0.          0.        ]
 [-0.09107868  0.          1.15260489  0.          0.        ]
 [ 0.21906124 -0.24824624  0.          1.17219552  0.        ]
 [-0.63663114  0.00444518 -0.18529677 -0.02098973  0.98386462]]
```

Норма $||(L + D)^{-1}U||$:

0.461892763393

Вектор решений x:

```
[ 7.00098463  3.99994592 -6.00022767  2.99988044 -2.00059765]
```

Вектор невязки r:

```
[ -4.35478811e-07  -1.66717357e-07  -2.63176632e-07   1.06778041e-07
  6.66133815e-16]
```

Норма $||r||$:

9.72150841383e-07

Количество итераций k:

6

Эпсилон ε:

1e-05

Метод Гаусса-Зейделя сходится по достаточному условию (норма $(L + D)^{-1}U < 1$). Точность решения и скорость сходимости зависят от эпсилона. Сравнивая с МПИ метод Гаусса-Зейделя даёт чуть лучшую точность (невязка порядка 10^{-7} против 10^{-6}) при большей скорости сходимости (6 итераций против 10). Для увеличения точности решения необходимо задать эпсилон.