Лабораторная работа №2

«Метод квадратного корня»

выполнил Пажитных Иван, 2-й курс, 1-я группа

1) Постановка задачи

Необходимо найти решение системы линейных алгебраических уравнений вида Ax=b, где A- квадратная матрица n-ого порядка, x и b – столбцы размеров n×1.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Предполагается, что det A=|A|≠0. Тогда решение системы существует и оно единственно.

Нам необходимо найти:

a) Вектор решений (с точностью 6 значащих цифр)

b) Найти вектор невязки (r=Ax-b)

c) Найти определитель матрицы

2) Алгоритм решения

Метод квадратного корня состоит в нахождении матриц S и D таких, что: $A = S^T \cdot D \cdot S$, где S – верхнетреугольная матрица, S* – нижняетреугольная, а D – диагональная (на главной диагонали 1 и -1)

Найдем значения S_{ij} матрицы S. Для этого приравняем элементы матрицы A к элементам матрицы S*SD и получим следующие значения:

$s_{ii} – s_{ij}*d_{ii} + \sum s_{ki}*d_{ii}*s_{ki} = a_{ij}$, i=1..j, j=1…n.

Решая данную систему относительно элементов s_{ii}, s_{ij} и d_{ii}. получим следующее:

$d_{i\,i} = \mathrm{sign}(a_{ii} – \sum_{k=1}^{i-1}|s_{ki}|^{\wedge 2}*d_{kk})$, i=1..n

$s_{ii} = \sqrt{(|a_{ii} – \sum_{k=1}^{i-1}|s_{ki}|^{\wedge 2}*d_{kk}|)}$, i=1..n

$s_{ij} = (a_{ii} – \sum_{k=1}^{i-1}s_{ki}*d_{kk}*s_{kj}) / (s_{ii}*d_{ii})$, i<j, j=1..n

Если искомое разложение найдено, то решение исходной системы сводится к решению системы из двух уравнений с треугольными матрицами: $\begin{cases} S^T D y = b \\ S x = y \end{cases}$

Алгоритм решения этой системы:

а) прямой ход: последовательное нахождение элементов y_i по указанным выше формулам и вычисление значений следующим образом:

$y_1 = b_1/s_{11}$; $y_i = (b_i – \sum_{k=1}^{i-1}s_{ki}*y_k) / s_{ii}$, i>1

б) обратный ход: нахождение решения системы:

$x_n = y_n/s_{nn}$; $x_i = (y_i – \sum_{k=i+1}^{n}s_{ki}*x_k) / s_{ii}$, i<n

3) Листинг программы

```
for line in inp:                                        # читаем A и b
    temp = [float(x) for x in line.split()]
    B.append(temp.pop())
    A.append(temp)

a = np.array(A)
At = a.transpose()                                      # находим At
b = np.array(B).transpose()

a = np.dot(At, a)                 # перемножаем A на At, теперь A - симметрическая
b = np.dot(At, b)                 # то же самое с b

s = zeros((n, m))
d = zeros(n)
s[0][0] = sqrt(a[0][0])
d[0] = copysign(1, a[0][0])
for i in range(n):                          # находим S и D по известным формулам
    val = a[i][i]-fsum([(s[k][i]**2)*d[k] for k in range(i)])
    d[i] = copysign(1, val)
    s[i][i] = sqrt(fabs(val))
    for j in range(i, n):
        s[i][j] = (a[i][j] - fsum([s[k][i]*d[k]*s[k][j] for k in range(i)]))/(s[i][i]*d[i])


det = np.prod([(s[i][i]**2)*d[i] for i in range(n)])          # вычисляем определитель

y = zeros(n)
y[0] = b[0]/s[0][0]                                     # находим y
for i in range(1, n):
    y[i] = (b[i] - fsum([s[k][i]*y[k] for k in range(i)]))/s[i][i]

x = zeros(n)
x[n-1] = y[n-1]/s[n-1][n-1]                             # находим x
for i in range(n-2, -1, -1):
    x[i] = (y[i] - fsum([s[i][k]*x[k] for k in range(i+1, n)]))/s[i][i]

r1 = np.dot(A, x)-np.array(B)                     # вычисляем невязку исходной
r2 = np.dot(a, x)-b.transpose()                   # вычисляем невязку симметричной
```

4) Результат и его анализ

Расширенная матрица коэффициентов $A|b$:

[0.6897 -0.0908 0.0182 0.0363 0.1271 | 4.2108]
[0.0944 1.0799 0.0000 -0.0726 0.0726 | 4.6174]
[0.0545 0.0000 0.8676 -0.2541 0.1452 | -5.8770]
[-0.1089 0.2287 0.0000 0.8531 -0.0363 | 2.7842]
[0.4538 0.0000 0.1634 0.0182 1.0164 | 0.2178]

Симметрическая A:

[0.70536135 0.01441237 0.13398766 -0.08030921 0.5676231]
[0.01441237 1.22673234 -0.00165256 0.11340719 0.05855825]
[0.13398766 -0.00165256 0.77976056 -0.21682262 0.2943685]
[-0.08030921 0.11340719 -0.21682262 0.79926611 -0.0500214]
[0.5676231 0.05855825 0.2943685 -0.0500214 1.07689486]

Новый столбец свободных членов b:

[2.81541308 5.24073616 -4.98666012 3.69013948 0.13738098]

Матрица S:

[0.83985793 0.01716049 0.1595361 -0.09562237 0.67585609]
[0. 1.10744655 -0.00396432 0.10388593 0.04240406]
[0. 0. 0.86850048 -0.23161249 0.21498337]
[0. 0. 0. 0.85187196 0.07042515]
[0. 0. 0. 0. 0.75308549]

Матрица D:

[1. 1. 1. 1. 1.]

Вектор решений x:

[7.00098534 3.99994603 -6.00022737 2.99988036 -2.00059801]

Определитель матрицы *det (A*A) (detA)*:

0.268555796909 (0.51822369389)

Вектор невязки исходной (A) *r1*:

[0.00000000e+00 -2.66453526e-15 -8.88178420e-16 4.44089210e-16 1.05471187e-15]

Вектор симметрической (A*A) *r1*:

[0.00000000e+00 -3.55271368e-15 -8.88178420e-16 4.44089210e-16 -3.05311332e-16]

Норма ||*r1*||:

5.05151476204e-15

Норма ||*r2*||:

5.19029264012e-15

Вывод: вектор невязки получился порядка 10^(-15) из этого следует, что решение найдено з достаточной точностью.