МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Домашняя работа №2
студента 2 курса 1 группы
Пажитных Ивана Павловича

Преподаватель
Дайняк Виктор Владимирович

Минск 2016

1 №1.8

$$a = 1, b = 1, x(t) = \lambda \int_{-1}^{1} (t^2 - 1) s x(s) ds + t$$

$$F(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (t^2 - 1) s x(s) ds + t$$

- C[-1,1]:

$\max_{t \in [-1,1]} |F(x) - F(y)| = max_{t\in[-1,1]} \left| \int_{-1}^{1} (t^2 - 1) s (x(s) - y(s) ds \right| \leq$
$\leq |\lambda| \int_{-1}^{1} |s| * max_{s\in[-1,1]} |x(s) - y(s)| ds = \lambda max_{s\in[-1,1]} |(x(s) - y(s)| = \lambda ||x(s) - y(s)||$
$\alpha = |\lambda| < 1$
Пусть $\lambda = \frac{1}{14}$
$||\mathrm{x}_n - a|| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} ||x_0 - x_1||$
$\mathrm{x}_0 = 0$
$\mathrm{x}_1 = F(x_0) = t$
$\alpha = \frac{1}{14}$
$||\mathrm{x}_0 - x_1|| = max_{t\in[-1,1]} |t - 0| = 1$
$\left(\frac{1}{14}\right)^n \frac{14}{13} < 0.001$
$\mathrm{n} > \left(\frac{\ln \frac{13}{14} * 0.001}{\ln 14}\right) \approx 2.645$
$\mathrm{n} = 3$
$\mathrm{x}_2 = F(x_1) = F(t) = \frac{1}{14}(t^2 - 1) \int_{-1}^{1} s^2 ds + t = \frac{1}{14}(t^2 - 1) \left[\frac{s^3}{3}\right]_{-1}^{1} + t = \frac{1}{21}(t^2 - 1) + t$
$\mathrm{x}_3 = F(x_2) = F\left(\frac{1}{21}(t^2 - 1) + s\right) = \frac{1}{14}(t^2 - 1) \int_{-1}^{1} s \left(\frac{1}{21}(s^2 - 1) + t\right) ds = \frac{1}{21*14}(t^2 - 1) \left[\frac{s^4}{4} - \frac{s^2}{2} + 21\frac{s^3}{3}\right]_{-1}^{1} \Rightarrow$
$\mathrm{x}_3 = \frac{1}{21}(t^2 - 1) + t$

- Точное:

$\mathrm{x(t)} = \lambda(t^2 - 1) \int_{-1}^{1} s x(s) ds + t$
$\mathrm{c} = \int_{-1}^{1} s x(s) ds \Rightarrow$
$\mathrm{x(t)} = \lambda(t^2 - 1) c + t$
$\mathrm{c} = \int_{-1}^{1} s \left(\lambda(s^2 - 1) c + s\right) ds = \left[c\lambda \frac{s^4}{4} - c\lambda \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \Rightarrow$
$\mathrm{x(t)} = \frac{1}{14}(t^2 - 1)\frac{2}{3} + t = \frac{1}{21}(t^2 - 1) + t$
$||\mathrm{x\text{-}x_3}|| = max_{t\in[-1,1]} \left(\frac{1}{21}(t^2 - 1) + t - \frac{1}{21}(t^2 - 1) - t\right) = 0$

- $\mathrm{L}_2[-1, 1]$:

$\mathrm{K(t,s)} = \lambda(t^2 - 1)s$
$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |K(t, s)|^2 dsdt = \lambda^2 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)^2 s^2 dsdt = \lambda^2 \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)^2 dt \int_{-1}^{1} s^2 ds = \frac{2}{3} \lambda^2 * \frac{16}{15} = \frac{32}{45} \lambda^2 < +\infty$
F(x) является сжимающим, если $\frac{4\sqrt{2}|\lambda|}{3\sqrt{3}} < 1 \Rightarrow |\lambda| < \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$
Пусть $\lambda = \frac{1}{14}$
$\frac{\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{1}{14}\right)^n}{1 - \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{1}{14}} \left(\int_{-1}^{1} (x_1(t) - x_0(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < 0.001 \Rightarrow$
$\frac{\left(\frac{2\sqrt{2}}{21\sqrt{3}} \frac{1}{14}\right)^n}{1 - \frac{2\sqrt{2}}{21\sqrt{3}} \frac{1}{14}} * \sqrt{\frac{2}{3}} < 0.001$
$\mathrm{n} > 2.486$
$\mathrm{n} = 3$

2 №2.8

$$g(x) = 2x^2 + 8x - 3 = 0$$

$\mathrm{x} = \text{-}\ 2\mathrm{x}^2 - 3_{\overline{8}}$
$\mathrm{F(x)} = \text{-}\ 2\mathrm{x}^2 - 3_{\overline{8}}$

$\alpha = max_{x\in[a;b]}|F'(x)|$
$\mathrm{F}^{'}(x) = -\frac{4x}{8} = -\frac{x}{2}$
$|\mathrm{F}^{'}(x)| < 1, |x| < 2$
$\begin{cases} ||x_0 - F(x_0)|| \leq r(1-\alpha(r)) \\ \alpha(r) < 1 \end{cases}$
$\alpha(r) = max_{x\in[-r;r]}|F^{'}(x)| = \frac{r}{2},$
$\mathrm{x}_1 = F(x_0) = \frac{3}{8}$
$\begin{cases} \frac{3}{8} \leq r(1-\frac{r}{2}) \\ \frac{r}{2} < 1 \end{cases}$
r=1 $\Rightarrow$ F - сжимающее, $\alpha \leq \frac{1}{2}$
$||\mathrm{x}_n - \alpha|| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}||x_1 - x_0|| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n * 2 * \frac{3}{8} \leq \frac{1}{100}$
$2^{-n} \leq 75^{-1}$
$\mathrm{n}\ln 2 \geq \ln 75$
$\mathrm{n} \geq \frac{\ln 75}{\ln 2} \approx 6,229$
n $= 7 \Rightarrow x_7$являются приближённым решением уравнения с заданной точностью, равной 0,01
$||\mathrm{x}||_p = (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$

3 №3.8

$$f(x)(t) = t\int_0^1 \frac{x(s)}{\sqrt[4]{s}}ds$$

f: E $\to E, E = L_2[0;1]$
$||\mathrm{F(x)\text{-}F(y)}||_{L_2[0;1]} = \left(\int_0^1 \left|t\int_0^1 \frac{x(s)-y(s)}{\sqrt[4]{s}}ds\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 t^2 \left(\int_0^1 |x(s)-y(s)|^2 \frac{1}{\sqrt{s}}ds\right)dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq$
$\leq \left(\int_0^1 t^2 \left(\int_0^1 |x(s)-y(s)|^2 max_{s\in[0;1]}s^{\frac{1}{2}}ds\right)dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 t^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}||x-y|| = \frac{1}{\sqrt{3}}||x-y||$
$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\mathrm{x}_0 = 0$
$\mathrm{x}_3 = x_2 = x_1 = F(x_0) = 0$
$||\mathrm{x}_3 - a||\ \frac{\alpha^3}{1-\alpha}||x_0 - x_1|| = 0$

4 №4.8

$$F : X \to Y$$

$\mathrm{X} = \mathrm{L}_2[0;1], Y = L_2[0;1]$
$\mathrm{F(x)} = \mathrm{tx(t^2)} = [r = t^2] = \sqrt{r}x(r)$
$||\mathrm{F(x)}||_{L_2[0;1]} = \left(\int_0^1 |r^{\frac{1}{2}}x(r)|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |r||x(r)|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 max_{r\in[0;1]}|r||x(r)|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |x(r)|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} =$
$= ||\mathrm{x}||_{L_2[0;1]} \Rightarrow$ если $||x||_{L_2[0;1]} < \sigma,$ то $||F(x)||_{L_2[0;1]} < \sigma \Rightarrow$ F непрервына в точке x_0
$\varepsilon > 0,$ покажем, что $\exists r(\varepsilon)$:
$\forall x(t), y(t) \in L_2[0;1]$ таких, что $||x-y|| = \left(\int_0^1 |x(t)-y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < \sigma,$ выполняется:
$||\mathrm{F(x)\text{-}F(y)}|| = \left(\int_0^1 |F(x)-F(y)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |r^{\frac{1}{2}}(x(r)-y(r))|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}$
$|\mathrm{F(x)\text{-}F(y)}| = |\mathrm{r}^{\frac{1}{2}}(x(r)-y(r))| \leq |x(r)-y(r)| \Rightarrow \varepsilon \leq \sigma \Rightarrow$ F равномерно непрерывна
$||\mathrm{F(x)\text{-}F(y)}||_{L_2[0;1]} \leq c||x-y||_{L_2[0;1]}$
$||\mathrm{F(x)\text{-}F(y)}||_{L_2[0;1]} = \left(\int_0^1 |r^{\frac{1}{2}}(x(r)-y(r))|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |r||x(r)-y(r)|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} \leq$
$\leq \left(\int_0^1 max_{z\in[0;1]}|r||x(r)-y(r)|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} = ||x-y||,$
где c=1, таким образом F удовелтворяет условию Липшица