МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра многопроцессорных систем и сетей

Матричные игры. Сетевые задачи

Лабораторная работа №2

Пажитных Ивана Павловича
студента 3 курса 1 группы
специальность "информатика"

Преподаватель:
Синяк Василий Сергеевич

Минск, 2017

Графоаналитический метод решения матричных игр

Найти графоаналитическим методом решение матричной игры з матрицей H

1.1 Задача 10b (ч1 стр. 29)

1.1.1 Условие

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 7 \\ -1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

1.1.2 Решение

Найдём верхнее и нижнее значения игры:

$$\alpha_1 = -2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1, \alpha_4 = -2$$

$$\beta_1 = 2, \beta_2 = 5, \beta_3 = 3, \beta_4 = 3, \beta_5 = 7$$

$\alpha = 1 \neq \beta = 2$ - чистых стратегий нет!

Будем исключать доминирующие стратегии:
Пусть стратегии первого игрока $A_i, i = \overline{1,4}$ - , а второго - $B_j, j = \overline{1,5}$
Доминирование будем обозначать, как "$\gg$"

$$([1,5,2,3,7] \geq [-2,4,1,3,-2]) \implies A_2 \gg A_1 \implies p_1 = 0$$
$$([-2,1,-1,2] \leq [-2,7,1,2]) \implies B_1 \gg B_5 \implies q_5 = 0$$
$$([1,2,3,-2] \leq [4,5,3,0]) \implies B_3 \gg B_2 \implies q_2 = 0$$
$$([1,2,3,-2] \leq [3,3,3,-2]) \implies B_3 \gg B_4 \implies q_4 = 0$$

Имеем:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Построим график:

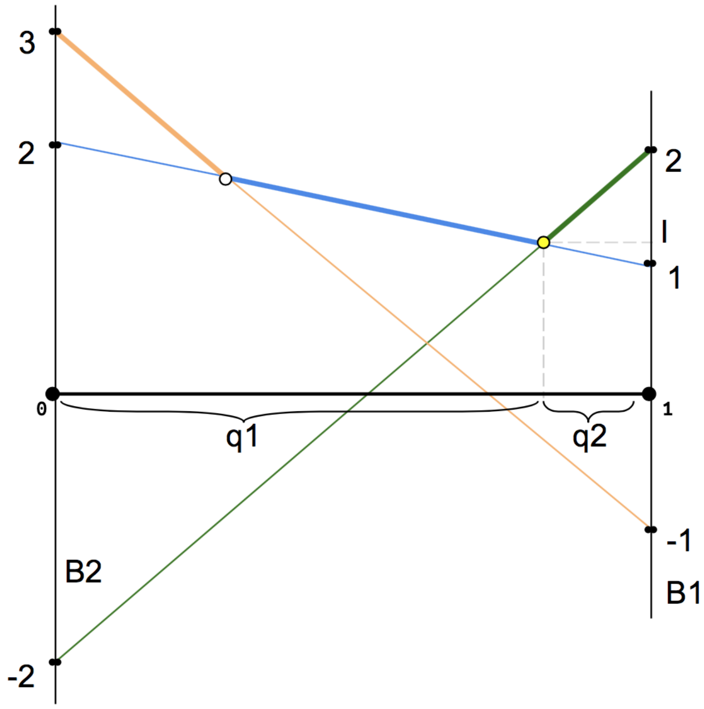


Рисунок 1.1 — Оптимальная точка - пересечение синей и зелёной стратегий

Запишем систему уравнений для оптимальной точки:

$$\begin{cases} 1 + q_2 = I \\ 2 - 4q_2 + I \end{cases} \tag{1.3}$$

Откуда: $q_2 = \frac{1}{5}, I = \frac{6}{5} \implies q_1 = \frac{4}{5}$

Исключив стратегию A_2 (зеленую) как проигрышную, запишем систему для стратегий A_1, A_3 первого игрока:

$$\begin{cases} p_1 + 2p_3 = I \\ 2p_1 - 2p_3 = I \\ p_1 + p_3 = 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

Откуда: $p_1 = \frac{4}{5}, p_3 = \frac{1}{5}$

Переходя к исходной размерности запишем ответ:

$$I = \frac{6}{5}$$

$$p = (0, \frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5})$$

$$q = (\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5}, 0, 0)$$

1.2 Задача 2d (ч1 стр. 21)

1.2.1 Условие

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

1.2.2 Решение

Найдём верхние и нижние значения игры

$$\alpha = 1, i_0 = 1$$
$$\beta = 1, j_0 = 5$$

Следовательно: $I = 1$, A_1 и B_5 - оптимальные чистые стратегии первого и второго игроков соответственно.

Докажем это с помощью графического метода:
Сведём задачу к меньшей размерности, исключив любые строки/столбцы кроме A_1 и B_5 - так как они доминирующие, имеем:

$$q_1 = 0, q_3 = 0, p_2 = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Построим график:

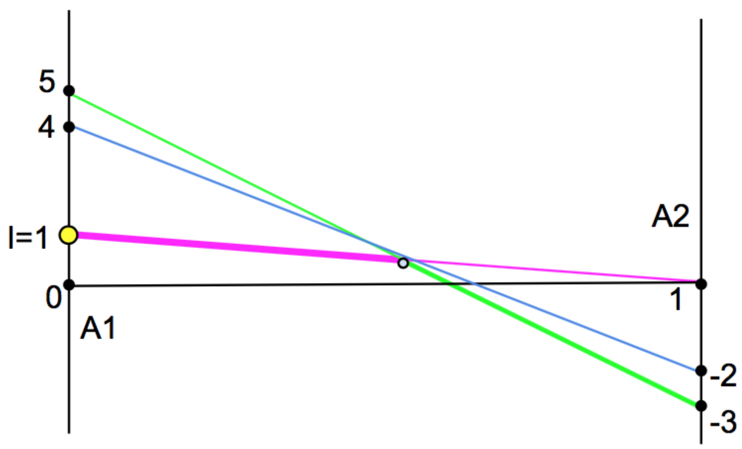


Рисунок 1.2 — Оптимальная точка соответствует чистой стратегии

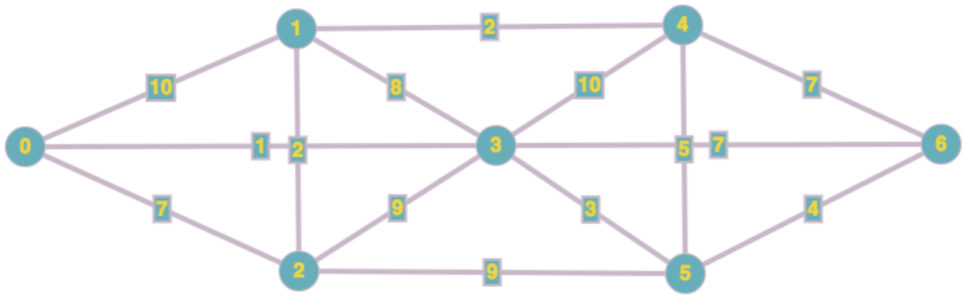
Ответ: $I = 1, p = (1, 0, 0), q = (0, 0, 0, 0, 1)$

Сетевые задачи

2.1 Задача 1b (ч2 стр. 8)

2.1.1 Условие

Для приведенных ниже неориентированных связных графов найти минимальное и максимальное остовные деревья



2.1.2 Решение

Будем использовать алгоритм Крускала:
Упорядочим рёбра по неубыванию весов

$$(0,3) \to 1$$
$$(1,2) \to 2$$
$$(1,4) \to 2$$
$$(3,5) \to 3$$
$$(5,6) \to 4$$
$$(4,5) \to 5$$
$$(0,2) \to 7$$
$$(3,6) \to 7$$
$$(4,6) \to 7$$
$$(1,3) \to 8$$
$$(2,3) \to 9$$
$$(2,5) \to 9$$
$$(0,1) \to 10$$
$$(3,4) \to 10$$

Добавляем рёбра в остов:

$$(0,3) \to (1,2) \to (1,4) \to (3,5) \to (5,6) \to (4,5) : [|I| = n-1] \implies stop$$

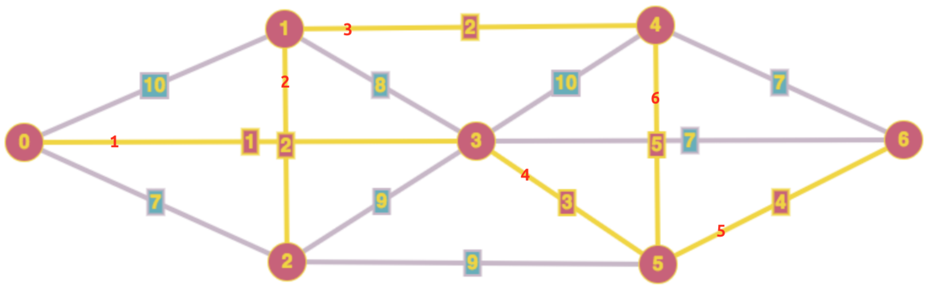


Рисунок 2.1 — Минимальный остов минимального веса

Вес остова: $W_{min} = 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 = 17$

Для минимального остовного дерева максимального веса аналогично:

$$(3,4) \to (0,1) \to (2,5) \to (2,3) \to (1,3) \to (4,6) : [|I| = n-1] \implies stop$$

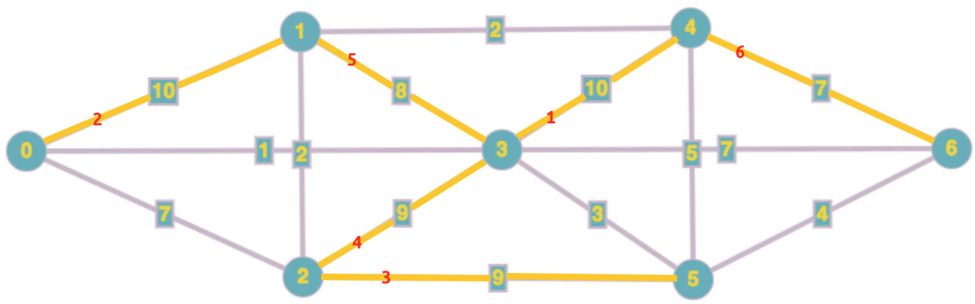


Рисунок 2.2 — Минимальный остов максимального веса

Вес остова: $W_{max} = 10 + 10 + 9 + 9 + 8 + 7 = 53$